

Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση

$a = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ βάση του V

$b = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ βάση του W

$[T]_a^b$ ο πίνακας της T από την βάση a
 $\uparrow \uparrow$ στην βάση b
 $m \times n$ $T(\vec{a}_i)$

Πρόβλημα ^(A): Υπάρχουν καταλληλές βάσεις a και b έτσι ώστε ο πίνακας $[T]_a^b$ να έχει "απλή" μορφή.

(ολα τα στοιχεία
 0 ή 1. 2m διαφύλλο
 στοιχεία ε' 0 και 1)

$$T: V \rightarrow V \quad [T]_a^a$$

Πρόβλημα ^(B): Υπάρχει καταλληλή βάση a του V έτσι ώστε ο πίνακας $[T]_a^a$ να έχει "απλή" μορφή.

(σε διαφύλλο απλή)
 όχι μόνο με 0, 1

Θεώρημα:

Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση και $r = \dim \text{Im } T$
 τότε υπάρχουν βάσεις $a = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του V και
 $b = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ του W έτσι ώστε

$$[T]_a^b = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

r μονάδες

$$[T]_a^b = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r = \dim(\text{Im } T)$

Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση

$a = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ βάση του V

$b = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ βάση του W

$[T]_a^b$ ο πίνακας της T από την βάση a
 $\uparrow \uparrow$ στην βάση b
 $m \times n$ $T(\vec{a}_i)$

Πρόβλημα ^(A) Υπάρχουν καταλληλές βάσεις a και b έτσι ώστε ο πίνακας $[T]_a^b$ να έχει "απλή" μορφή.

(ολα τα στοιχεία
 0 ή 1. Στην διαγώνιο
 αν είναι 1 είναι 0)

$$T: V \rightarrow V \quad [T]_a^a$$

Πρόβλημα ^(B) Υπάρχει καταλληλή βάση a του V έτσι ώστε ο πίνακας $[T]_a^a$ να έχει "απλή" μορφή.

(σε διαγώνιο 0 ή 1
 όχι που 0 ή 1)

Θεώρημα:

Έστω $T: V \rightarrow W$ γραμμική απεικόνιση και $r = \dim \operatorname{Im} T$
 τότε υπάρχουν βάσεις $a = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του V και
 $b = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ του W έτσι ώστε

$$[T]_a^b = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

r μονάδες

$$[T]_a^b = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

$r = \dim(\operatorname{Im} T)$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $T(\vec{a}_1) \quad T(\vec{a}_2) \quad \dots \quad T(\vec{a}_n)$

Απόδειξη:

$$\dim U = \underbrace{\dim(\ker T)}_n + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} T)}_{n-r}$$

Εστω $\{\vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_n\}$ βάση του $\ker T$

$\vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_n$ γΑ άρα μπορούμε να τα συμπληρώ-
σουμε σε μια βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \vec{a}_r, \vec{a}_{r+1}, \vec{a}_n\}$ του V

Τα διανύσματα $T(\vec{a}_1), \dots, T(\vec{a}_r)$ είναι βάση
της εικόνας από (1), (2)

$$\operatorname{Im} T = \langle \underbrace{T(\vec{a}_1), T(\vec{a}_2), \dots, T(\vec{a}_{r+1}), T(\vec{a}_n)}_{=0} \rangle$$

$$= \langle T(\vec{a}_1), T(\vec{a}_2), \dots, T(\vec{a}_r) \rangle \text{ και } \dim(\operatorname{Im} T) = r$$

Εφόσον είναι βάση, τότε $T(\vec{a}_1), \dots, T(\vec{a}_r)$ γΑ.

Άρα μπορούμε να τα συμπληρώσουμε σε μια βάση
 $b = \{\vec{b}_1 = T(\vec{a}_1), \vec{b}_2 = T(\vec{a}_2), \dots, \vec{b}_r = T(\vec{a}_r), \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n\}$

Τότε

$$[T]_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $T(\vec{a}_1) \quad \quad \quad T(\vec{a}_r) \quad \quad \quad T(\vec{a}_{r+1})$

$$T(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$$

$$= 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n$$

$$T(\vec{a}_r) = \vec{b}_r$$

$$= 0\vec{b}_1 + \dots + 1\vec{b}_r + \dots + 0\vec{b}_n$$

$$T(\vec{a}_{r+1}) = \vec{b}_{r+1} = 0\vec{b}_1 + 1\vec{b}_{r+1} + \dots + 0\vec{b}_n$$

$$T(\vec{a}_{r+1}) = \vec{0}$$

Παράδειγμα:

① Έστω $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με

$$T(x, y, z) = (x+y-2z, 2x-2y, 3x+y-4z, y-z)$$

Βρίσκει κατάλληλους βάσεις α του $\mathbb{R}^3$ και β του $\mathbb{R}^4$

ετσι ώστε

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύση:

4x3

$$\ker T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y-2z, 2x-2y, 3x+y-4z, y-z) = (0, 0, 0, 0)\}$$

$$x+y-2z=0$$

$$2x-2y=0$$

$$3x+y-4z=0$$

$$y-z=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{r_2 \rightarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 - 3r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x+y-2z=0$$

$$y-z=0$$

$$z=t, y=t, x=t$$

$$\text{Άρα } \ker T = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$\dim(\operatorname{Im} T) = 2 + \dim \ker T = \dim \mathbb{R}^3$$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4x3

$$\vec{a} = \{ \vec{a}_1 = (0, 1, 0), \vec{a}_2 = (0, 0, 1), \vec{a}_3 = (1, 1, 1) \}$$

$$\vec{b} = \{ \vec{b}_1 = T(\vec{a}_1) = (1, -2, 1, 1), \vec{b}_2 = T(\vec{a}_2) = (2, 0, 4, -1),$$

$$\vec{b}_3 = (0, 0, 1, 0), \vec{b}_4 = (0, 0, 0, 1) \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow -\frac{r_2}{4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θυμήσαι:

$$[T]_{\beta}^{\delta} = [I]_{\alpha}^{\delta} [T]_{\alpha}^{\beta} [I]_{\beta}^{\alpha}$$

$$\begin{matrix} [T]_{\alpha}^{\beta} & = & [I]_{\delta}^{\beta} & [T]_{\beta}^{\delta} & [I]_{\alpha}^{\delta} \\ m \times n & & m \times m & m \times n & n \times n \end{matrix}$$

$$([I]_{\alpha}^{\beta})^{-1} = [I]_{\beta}^{\alpha}$$

πίνακες αλληλότητας βάσης
αυτοαποστροφικοί

Ορισμός:

Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ονομάζονται ισοδύναμοι αν υπάρχουν αυτοαποστροφικοί πίνακες P, Q έτσι ώστε $B = PAQ$.

Ορισμός:

Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζονται όμοιοι, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε $B = P^{-1}AP$

Θεώρημα:

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PAQ$$

όπου r είναι η βαθμίδα του πίνακα A .

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$$

$$\underset{m \times 1}{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = A \quad \text{όπου}$$

α κανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$

β — " — " του $\mathbb{R}^{m \times 1}$

για τη γραμμική απεικόνιση T μπορούμε να βρούμε βάσεις β και δ έτσι ώστε

$$[T]_{\delta}^{\delta} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = \text{rank } A.$$

$$[T]_{\delta}^{\delta} = [I]_{\beta}^{\delta} [T]_{\alpha}^{\beta} [I]_{\delta}^{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = PAQ$$

$$= U_1 U_2 \dots U_k \underbrace{A}_{\text{στοιχείωδης}} U_{k+1} \dots U_n$$

↖ στρόφοι
↘ στρόφοι
μετασχηματισμοί

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & b & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

↖ $\Sigma_2 - b\Sigma_1$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & 0 & & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα:

① $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (-x + 2y + 2z, 2x + 2y + 2z, -3x - 6y - 6z)$$

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$T(\hat{1}, 0, 0) \quad T(0, \hat{1}, 0) \quad T(0, 0, \hat{1})$

α κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$b = \{(-2, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\} \quad T(-2, 1, 0) = (4, 2, 0)$$

$$[T]_b^b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -2(-2, 1, 0) = -2b_1$$

$$T(0, 1, -1) = (0, 0, 0) = 0 \vec{b}_2$$

$$T(1, 0, -1) = (-3, 0, 3) = -3 \vec{b}_3$$

$$T(\vec{b}_1) = -2 \vec{b}_1$$

$$T(\vec{b}_2) = 0 \vec{b}_2$$

$$T(\vec{b}_3) = -3 \vec{b}_3$$

Ορισμός:

Έστω $T: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και V ένας K -δυναμιζατικός χώρος.

Το $\lambda \in K$ ονομάζεται ιδιοτιμή της απεικόνισης T αν υπάρχει $\vec{u} \neq \vec{0}$ τέτοιο ώστε $T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. Το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

Ορισμός:

$A \in K^{n \times n}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A

$$\det(A - x I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

Πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
 $a_i \in K$

Αν $a_n \neq 0$ τότε ο βαθμός του $f(x)$ είναι n

$\deg(f(x))$

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

Ορισμός:

Το πολυώνυμο $f(x)$ (διαφορετικό του μηδενικού πολυωνύμου) λέγεται μονικό αν $a_n = 1$

Διαφαιστικότητα πολυωνύμων.

Έστω $f(x), g(x) \in K[x]$

Θα λέμε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ διαιρεί το $g(x)$ (και θα το συμβολίζουμε $f(x) | g(x)$ αν υπάρχει $h(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε $g(x) = h(x)f(x)$)

$f(x) | g(x) \rightarrow f(x)$ διαιρεί το $g(x)$
 $\hookrightarrow g(x)$ πολλαπλό του $f(x)$

Παραδείγματα:

① $x^2 + 1 | x^4 - 1$

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

② $x - 1 | 13x^5 + 2017x^3 - 2020x$

Ιδιότητες

① $f(x) \mid 0 = 0 + 0x + \dots + 0x^n$
 $0 = 0f(x)$

② Το μηδενικό πολυώνυμο διαιρεί παν
το μηδενικό πολυώνυμο

$$0 \mid f(x) \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(x) = h(x)0 = 0$$

③ Αν $f(x)g(x) = 0$ τότε $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$

④ Αν $f(x) \mid g(x)$ τότε $\deg(f(x)) \leq \deg(g(x))$

$$(f(x) \neq g(x) \neq 0)$$

⑤ Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$
Τότε $\deg(f(x)) = \deg(g(x))$

Παράδειγμα:

① $2x^3 + x - 3$ $x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

⑥ Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid h(x)$ τότε

$$f(x) \mid h(x)$$

⑦ Αν $f(x) \mid g_1(x)$ και $f(x) \mid g_2(x)$ τότε

$$f(x) \mid h_1(x)g_1(x) + h_2(x)g_2(x)$$

⑧ Αν $c \neq 0$ είναι σταθερό πολυώνυμο
τότε $c \mid f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{c} f(x) \cdot c$$

Ορισμός:

Ένα μη σταθερό πολυώνυμο $P(x) \in K[X]$ λέγεται αναγωγο στο $K[X]$ αν οι μοναδικοί διαιρέτες του $P(x)$ στο $K[X]$ είναι τα σταθερά πολυώνυμα και πολυώνυμα της μορφής $cP(x)$

Ισχυρισμός: $P(x)$ αναγωγο αν η σχέση $P(x) = f(x)g(x)$ συνεπάγεται $f(x)$ σταθερά ή $g(x)$ σταθερά

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x-1 &= 1(x-1) \\ &= 1/2(2x-2) \\ &= (3x-3) \cdot 1/3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad x^2+1 = 1/7(7x^2+7)$$

αναγωγο

$\mathbb{R}[X]$

$$\textcircled{3} \quad x^2+1 = (x+i)(x-i) \in \mathbb{C}[X]$$

$$= x^2 - i^2 = x^2 + 1$$

$$i^2 = -1$$

όμως μιγαδικούς
δεν είναι αναγωγο